Material by: Caio Guimarães (Equipe Rumoaoita.com)

Última atualização: 14 de outubro de 2006

4 – Mudança de Coordenadas

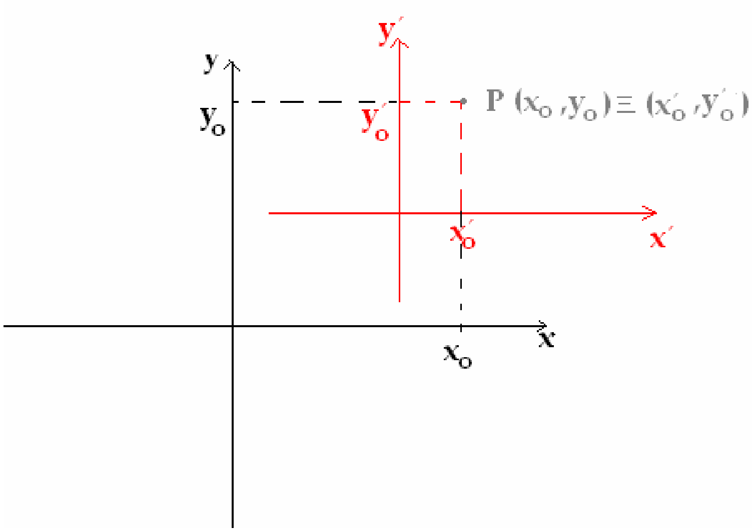
Translação e Rotação de Curvas no R^2

Introdução

O enfoque dos 3 primeiros capítulos (do capítulo 5 a seguir será assim também) foi de argumentos geométricos para resoluções de questões de seções cônicas. O propósito foi mostrar uma saída alternativa (em muitas vezes mais prática) para soluções de problemas usando geometria analítica. Nesse capítulo nos afastaremos um pouco dessa abordagem, voltando um pouco ao 'algebrismo' analítico para que possamos estudar um assunto importante: Mudança de Coordenadas.

4.1 Translação de Eixos

Consiste em criar um novo sistema de eixos (de mesma natureza, ortogonal ou não), simplesmente transladando a sua posição em relação à original.

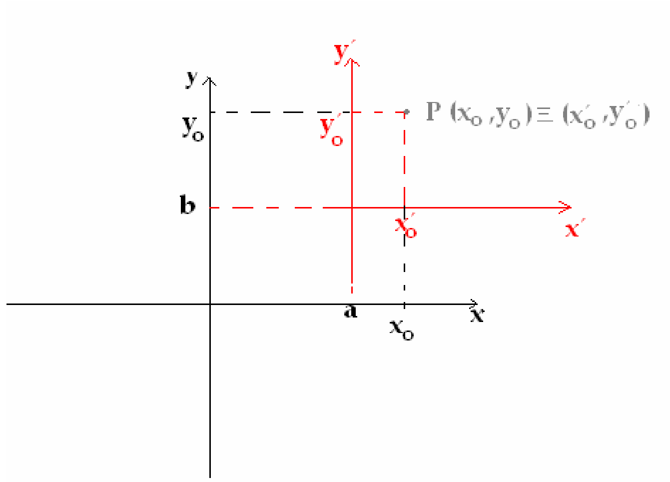


Note que, na figura ao lado, um ponto no plano pode ser localizado por suas coordenadas em relação a um referencial. O mesmo ponto pode ter pares de coordenadas diferentes, dependendo do referencial tomado.

Denotaremos o sistema de eixos original por xoy, e o novo por x´oy´.

Como relacionar os pares de coordenadas de eixos transladados?

Seja (a,b) o par das coordenadas da nova origem do sistema x´oy´ em relação ao sistema xoy.



Da figura ao lado:

$$\begin{cases} x_o = a + x_o' \\ y_o = b + y_o' \end{cases}$$

Ou ainda:

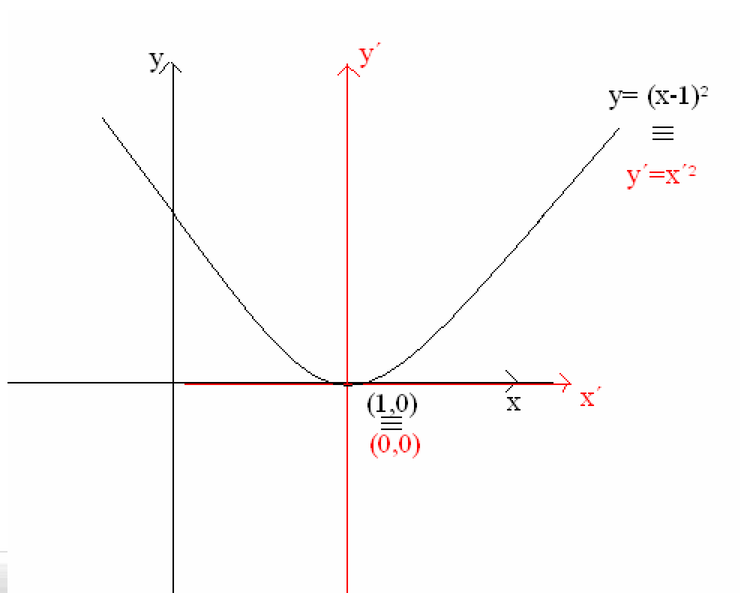
$$\boxed{\begin{cases} x_o' = x_o - a \\ y_o' = y_o - b \end{cases}}$$

(Equações de Translação de Eixos)

Aplicações: Construção de gráficos

A translação de eixos pode nos ajudar a construir gráficos:

Ex: $y = (x-1)^2$



Conhecemos o gráfico de $y = x^2$ (uma parábola com vértice na origem). Com a translação de eixos, para um sistema cuja nova origem seja em (1,0), podemos

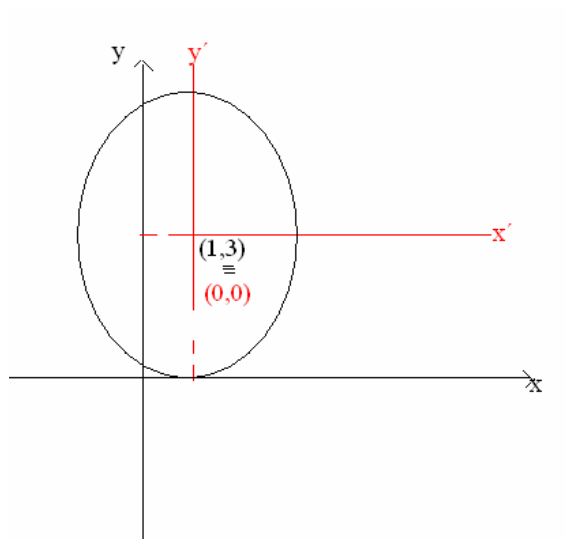
identificar o gráfico de
$y = (x-1)^2$

Ex 2:

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$$

Elipse transladada:

$$\frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{9} = 1$$



4.2 Eliminação dos termos lineares de uma curva no R^2

Qualquer curva do tipo cônica, ou suas degenerações podem ser descritas por uma equação, como já vimos. A equação geral de uma curva desse tipo no R^2 é:

$$\boxed{Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

Muitas vezes para identificar uma curva desse tipo (se é elipse, hipérbole, parábola, ou degeneração) é mais fácil ter a equação na ausência dos termos lineares (termos em x e y, no nosso caso os termos D e E). Veremos a seguir como eliminar esses termos usando uma translação de eixos.

Das equações de translação temos:

$$\begin{cases} x = a + x' \\ y = b + y' \end{cases}$$

Substituindo na equação geral da curva:

$$A\left(a + x'\right)^2 + B\left(a + x'\right)\left(b + y'\right) + C\left(b + y'\right)^2 + D\left(a + x'\right) + E\left(b + y'\right) + F = 0$$

Arrumando:

$$Ax'^2 + Cy'^2 + Bx'y' + x'\left(2Aa + Bb + D\right) + y'\left(2Cb + Ba + E\right) +$$
$$+ a^2 + b^2 + Bab + Da + Eb + F = 0$$

Queremos achar a e b tais que os termos em x´ e y´ sejam 0.
Logo, basta que:

$$\begin{cases} 2Aa + Bb + D = 0 \\ 2Cb + Ba + E = 0 \end{cases}$$

Isto é, dada uma curva na forma geral, o sistema que nos dá como solução o par (a,b) que eliminará os termos lineares por meio de translação é :

$$\boxed{\begin{cases} 2Ax + By + D = 0 \\ 2Cy + Bx + E = 0 \end{cases}}$$

(sistema de eliminação de termos lineares)

OBS Importante:

1) **Note que** $F' = a^2 + b^2 + Bab + Da + Eb + F$ **, o que corresponde a substituir (a,b) na equação da curva (onde (a,b) é o par solução do sistema acima)**

2) **Esse sistema é um resultado geral para qualquer curva. Um bom método mnemônico para "decorar" o sistema, é notar que a primeira equação nada mais é do que a derivada parcial da equação da curva geral em relação a x (considerar y constante e x como variável); a segunda equação é a derivada parcial da equação da curva geral em relação a y (considerar x como constante e y como variável).**

   Lembrar que esse é apenas um método mnemônico para decorar o sistema.

Centro da curva

Estudemos o sistema

$$\begin{cases} 2Ax + By + D = 0 \\ 2Cy + Bx + E = 0 \end{cases}$$

Verifiquemos a validade do sistema, pelo seu determinante principal:

$$\begin{vmatrix} 2A & B \\ B & 2C \end{vmatrix} = 4AC - B^2$$

Note que para $4AC - B^2 = 0$ **não conseguimos encontrar solução determinada para o sistema. Nesse caso dizemos que a curva em questão NÃO tem centro.**

Esse é o caso das curvas do tipo parábola e de degenerações de cônicas.

Para $4AC - B^2 \neq 0$ a solução é possível e determinável, e dizemos que o centro da cônica é exatamente a solução (a,b).

Exemplo:

Verifique se a curva $3x^2 + 8xy + y^2 + 6x + 2y + 3 = 0$ tem centro ou não. Caso tiver centro, determine-o.

Solução:

Equações de eliminação dos termos lineares:

$$\begin{cases} 6x + 8y + 6 = 0 \\ 8x + 2y + 2 = 0 \end{cases} \quad \therefore \begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$$

O sistema é Possível e Determinado com solução: $\left(-\frac{1}{13}, -\frac{9}{13}\right)$ que é o centro da curva.

Degenerações de curva

Podemos notar que o fato da solução do sistema existir não garante que a curva existe.

Exemplo: $3x^2 + y^2 + 6x + 2y + 5 = 0$ **, cujo sistema de eliminação dos termos lineares é:**

$$\begin{cases} 6x + 6 = 0 \\ 2y + 2 = 0 \end{cases} \quad \therefore (a, b) = (-1, -1)$$

No novo sistema, a curva se torna:

$$3x'^2 + y'^2 + 1 = 0$$

Note que essa curva não existe no R^2 uma vez que x'^2 , y'^2 são sempre positivos.

Denominamos esse tipo de curva de $\boxed{\text{Conjunto vazio}}$ **ou simplesmente o símbolo:** $\varnothing$

Poderíamos termos nos atentado a esse fato sem utilizar o sistema de eliminação dos termos lineares, tentando resolver a equação do segundo grau em x, pelo método de Báskara, por exemplo,:

$$3x^2 + y^2 + 6x + 2y + 5 = 0$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 6x + (y^2 + 2y + 5) = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 12y^2 - 24y - 60}}{6} = \frac{-6 \pm \sqrt{-12(y+1)^2 - 12}}{6}$$

Dentro do radical temos uma expressão negativa para qualquer valor de y, indicando também que a solução é o conjunto vazio.

Conclusão

Podemos nos prevenir das degenerações ao tentarmos resolver a equação do segundo grau em uma das variáveis. A seguir, apresentamos exemplos de diferentes degenerações detectadas por esse método (analisando a solução do 2º grau).

i) Degeneração do tipo 2 retas coincidentes:

Exemplo:

$$x^2 + xy - 2y^2 + x + 2y = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + x(y+1) + (-2y^2 + 2y) = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-\left(y+1\right) \pm \sqrt{(y+1)^2 - 4(-2y^2 + 2y)}}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-\left(y+1\right) \pm \sqrt{9y^2 - 6y + 1}}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-\left(y+1\right) \pm \sqrt{(3y-1)^2}}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-\left(y+1\right) \pm \left(3y-1\right)}{2} = \begin{cases} -2y \\ ou \\ y-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} x + 2y = 0 \\ ou \\ x - y + 1 = 0 \end{cases}}$$

(2 retas no R^2)

iii) Conjunto vazio

Exemplo:

$$2x^2 - 2xy + 5y^2 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow\ 2x^2 + x(-2y) + (5y^2 + 1) = 0$$

$$\Rightarrow\ x = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 - 8(5y^2 + 1)}}{4}$$

$$\Rightarrow\ x = \frac{2y \pm \sqrt{-36y^2 - 8}}{4}$$

$$\Rightarrow\ (x, y) = \varnothing$$

(conjunto vazio)

iii) Degeneração do tipo ponto:

$$x^2 + 2x + y^2 - 4y + 5 = 0$$

$$\Rightarrow\ x^2 + 2x + (y^2 - 4y + 5) = 0$$

$$\Rightarrow\ x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - (4y^2 - 16y + 20)}}{2}$$

$$\Rightarrow\ x = \frac{-2 \pm \sqrt{-4y^2 + 16y - 16}}{2}$$

$$\Rightarrow\ x = \frac{-2 \pm \sqrt{-4(y-4)^2}}{2}$$

Para que haja solução, y=4, e com isso x = -1.
A solução é um ponto no R^2 (-1, 4)

Questão Contextualizada Resolvida

[ITA 2003] A área do polígono situado no primeiro quadrante, que é delimitado pelos eixos coordenados e pelo conjunto $\left\{(x, y) \in R^2 : 3x^2 + 2y^2 + 5xy - 9x - 8y + 6 = 0\right\}$ **é igual a:**

$a)\sqrt{6} \quad b)2,5 \quad c)2\sqrt{2} \quad d)3 \quad e)10/3$

Solução:

O fato do enunciado mencionar polígono nos leva a crer que a curva descrita se degenera em duas retas. Tentaremos resolver a equação do segundo grau em x:

$3x^2 + 2y^2 + 5xy - 9x - 8y + 6 = 0$

$$\Rightarrow \quad 3x^2 + x(5y - 9) + (2y^2 - 8y + 6) = 0$$

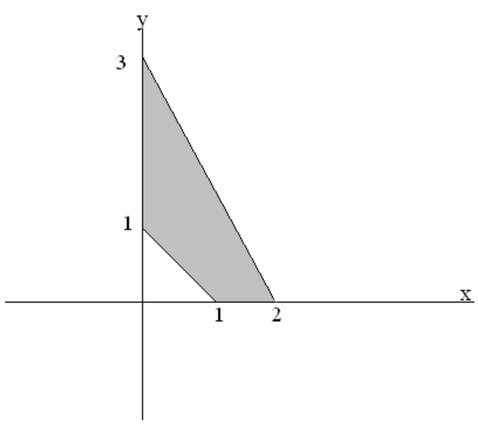
$$\Rightarrow \quad x = \frac{(9 - 5y) \pm \sqrt{(5y - 9)^2 - 12.(2y^2 - 8y + 6)}}{6}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{(9 - 5y) \pm \sqrt{y^2 + 6y + 9}}{6}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{(9 - 5y) \pm \sqrt{(y + 3)^2}}{6}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{(9 - 5y) \pm (y + 3)}{6} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 3x + 2y - 6 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

Traçando o gráfico das retas:



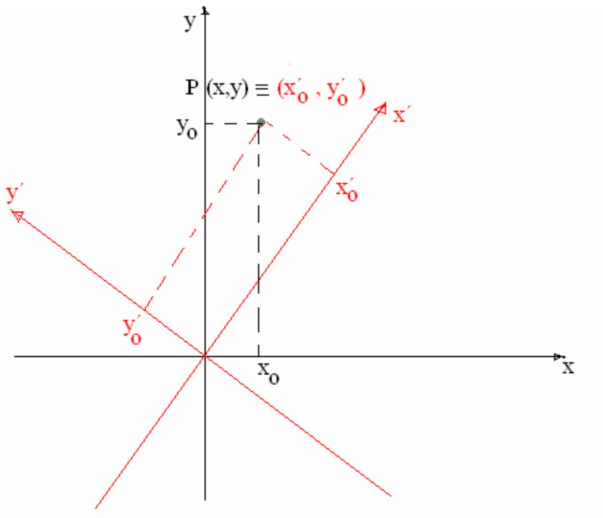
A área pedida é a subtração de dois triângulos (como mostra a figura).

$$Area = \frac{3.2}{2} - \frac{1.1}{2} = \frac{5}{2} = 2,5$$

(Alternativa b)

4.3 Rotação de Eixos

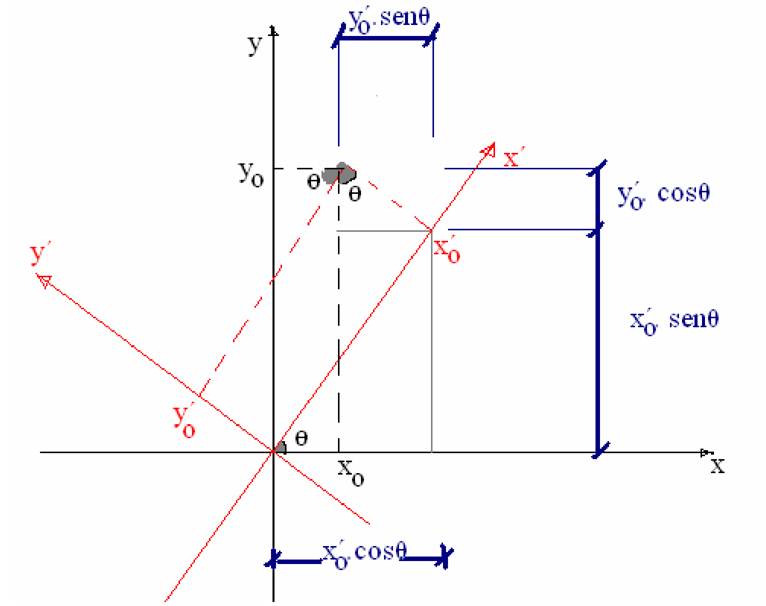
Consiste em criar um novo sistema de eixos ortogonais rotacionando o original de certa angulação.



Note que, na figura ao lado, um ponto no plano pode localizado por suas coordenadas em relação a um referencial. O mesmo ponto pode ter pares de coordenadas diferentes, dependendo do referencial tomado.

Como relacionar os pares de coordenadas de eixos rotacionados?

Seja θ o ângulo de rotação dos eixos.



Da figura acima segue:

$$\begin{cases} x_o = x_o' \cos\theta - y_o' sen\theta \\ y_o = x_o' sen\theta + y_o' \cos\theta \end{cases}$$

Podemos expressar x_o' **e** y_o' **em função de** x_o **e** y_o **invertendo o sistema:**

$$\begin{cases} x_o' = x_o \cos\theta + y_o sen\theta \\ y_o' = -x_o sen\theta + y_o \cos\theta \end{cases}$$

(Equações de Rotação de Eixos)

Outra maneira de pensar:

Imagine o vetor (x,y) que liga um ponto genérico de um sistema ortogonal à origem. Seja (x´,y´) suas coordenadas no novo sistema, rotacionado de θ. Podemos imaginar o vetor (x, y) como representando o complexo $x + i.y$

Rotacionar o sistema de um ângulo θ corresponde a manter a orientação dos eixos constante rotacionar o vetor de – θ.

Para rotacionar um complexo de um ângulo – θ, devemos multiplicá-lo por $\cos(-\theta) + i.\sin(-\theta)$.

Lembrando a propriedade dos complexos:
$(cis\alpha).(cis\beta) = cis(\alpha + \beta)$

Sendo (x', y') o par ordenado no novo sistema:
$x' + i.y' = (x + i.y)(\cos(-\theta) + i.\sin(-\theta))$
$= (x\cos\theta + y.\sin\theta) + i.(-x\sin\theta + y.\cos\theta)$

De onde segue que:

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta + ysen\theta \\ y' = -xsen\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

Obviamente, há coerência com o resultado que havíamos obtido geometricamente. A razão de mostrarmos essa segunda maneira de obter o sistema de equações de rotação é que se trata de uma maneira mais fácil e mais rápida de se obter (importante para quem tem pouco tempo em uma prova de vestibular).

Exemplo:**Considere o ponto (1,3) num sistema ortogonal xoy. Determine as coordenadas desse ponto num sistema rotacionado de 30º em relação ao original (no sentido trigonométrico).**

Solução:
Equações de rotação:

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta + ysen\theta \\ y' = -xsen\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

Logo: $\begin{cases} x' = 1.\cos 30^o + 3sen30^o \\ y' = -1sen30^o + 3\cos 30^o \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} x' = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2} \\ y' = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

As coordenadas do ponto no novo sistema serão: $\left(\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}, \dfrac{3\sqrt{3}-1}{2}\right)$

4.4 Eliminação dos termos retangulares de uma curva no R²

Como já vimos, a equação geral de uma curva desse tipo no R² é:

$$\boxed{Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

O termo em x.y é chamado de termo retangular (no nosso caso é o coeficiente B) da curva. As cônicas nas formas canônicas como conhecemos não possuem esse termo. Portanto, para identificarmos que tipo de curva estamos estudando ao analisarmos uma equação geral, seria interessante procurarmos um sistema de eixos tal que a equação descrita referente a esse sistema não possua termo retangular.

Como vimos a equação da curva após uma translação de eixos fica:

$$Ax'^2 + Cy'^2 + Bx'y' + x'\left(2Aa + Bb + D\right) + y'\left(2Cb + Ba + E\right) + F + Bab = 0$$

Ou seja, a equação permanece com termo retangular. A translação de eixos não é suficiente para eliminarmos tal termo.

Tentaremos eliminar o termo retangular utilizando a rotação, i.e., queremos encontrar θ de tal forma que um sistema de eixos rotacionados de θ não tenha termo retangular.

Das equações de rotação temos:

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'sen\theta \\ y = x'sen\theta + y'\cos\theta \end{cases}$$

Para que o raciocínio algébrico fique mais claro, usaremos a notação: $\cos\theta = c \quad ; \quad sen\theta = s$

Substituindo na equação geral da curva:

$$A\left(x'.c - y'.s\right)^2 + B\left(x'.c - y'.s\right)\left(x'.s + y'.c\right) + C\left(x'.s + y'.c\right)^2 +$$
$$+ D\left(x'.c - y'.s\right) + E\left(x'.s + y'.c\right) + F = 0$$

Arrumando:

$$x'^2\left(Ac^2 + Bc.s + Cs^2\right) + y'^2\left(C.c^2 - B.s.c + As^2\right) + x'y'\left(2C.cs - 2Acs + Bc^2 - Bs^2\right) +$$
$$+ x'\left(Dc + Es\right) + y'\left(Ec - Ds\right) + F = 0$$

Para que a equação esteja na forma:

$$A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$$

Temos as seguintes relações:

$$\begin{cases} A' = A\cos^2\theta + B\cos\theta.\sin\theta + C.sen^2\theta \\ B' = 2\cos\theta.\sin\theta\left(C - A\right) + B\left(\cos^2\theta - sen^2\theta\right) \\ C' = C.\cos^2\theta - B\cos\theta.\sin\theta + Asen^2\theta \\ D' = D.\cos\theta + E.\sin\theta \\ E' = E.\cos\theta - D.\sin\theta \\ F' = F \end{cases}$$

Observação importante:
Uma rotação NÃO altera o termo independente da curva.

Das relações que acabamos obter, temos que:

$$B' = 2\cos\theta.\sin\theta\left(C - A\right) + B\left(\cos^2\theta - sen^2\theta\right)$$

Queremos achar θ tal que B´=0.

$$B' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\cos\theta.\sin\theta\left(C - A\right) + B\left(\cos^2\theta - sen^2\theta\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin(2\theta)\left(C - A\right) + B\cos(2\theta) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad tg(2\theta) = \frac{B}{A - C}$$

Ou seja, o ângulo θ que elimina o termo retangular numa rotação é tal que:

$$tg(2\theta) = \frac{B}{A-C}$$

Repare que no caso de A=C, deveremos procurar um ângulo tal que a tangente não exista.

$$2\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

Basta (no caso de A=C) tomarmos a rotação de 45 graus para eliminarmos o termo retangular.

OBS Importante:

Sempre haverá 2 ângulos diferentes que eliminarão o termo retangular. Qualquer um dos dois nos servirá.

Questão Contextualizada Resolvida

[IME] Determine o lugar geométrico definido pela equação em R²:

$$2x^2 - 4xy + 4y^2 - 2x - 8y + 9 = 0$$

Solução:

Primeiro, eliminemos os termos lineares:

$$\begin{cases} 4x - 4y - 2 = 0 \\ 8y - 4x - 8 = 0 \end{cases} \quad \therefore \quad (x, y) = \left(3, \frac{5}{2}\right)$$

Para acharmos F´, basta substituir o centro da curva na equação geral:

$$F' = 2(3)^2 - 4(3)\left(\frac{5}{2}\right) + 4\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2(3) - 8\left(\frac{5}{2}\right) + 9 = -4$$

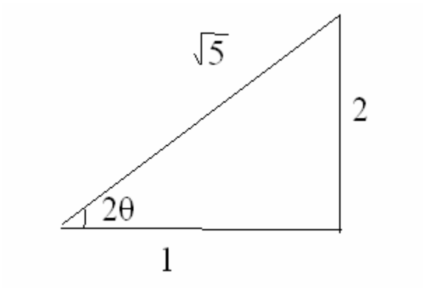
A nova equação, após a translação é:

$2x^2 - 4xy + 4y^2 - 4 = 0$ ou ainda $x^2 - 2xy + 2y^2 - 2 = 0$

O ângulo que eliminará o termo retangular é tal que:

$$tg(2\theta) = \frac{B}{A-C} = 2$$

Como θ entre [0,90º] é suficiente para nós, consideremos o triângulo:



$$\cos(2\theta) = \frac{1}{5} \Rightarrow \begin{cases} 2\cos^2\theta - 1 = \frac{1}{5} \\ 1 - 2sen^2\theta = \frac{1}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+5}{10}} \\ sen\theta = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \end{cases}$$

Do sistema de equações de rotação temos que a rotação abaixo eliminará o termo retangular:

$$\begin{cases} x = x'\sqrt{\frac{\sqrt{5}+5}{10}} - y'.\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \\ y = x'\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} + y'\sqrt{\frac{\sqrt{5}+5}{10}} \end{cases}$$

Substituindo na equação: $x^2 - 2xy + 2y^2 - 2 = 0$

$$\left(x'\sqrt{\frac{\sqrt{5}+5}{10}} - y'.\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\right)^2 - 2\left(x'\sqrt{\frac{\sqrt{5}+5}{10}} - y'.\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\right)\left(x'\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} + y'\sqrt{\frac{\sqrt{5}+5}{10}}\right) +$$

$$+2\left(x'\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} + y'\sqrt{\frac{\sqrt{5}+5}{10}}\right)^2 - 2 = 0$$

Simplificando:

$$\left(x'^2.\frac{5+\sqrt{5}}{10}-4.x'y'.\frac{\sqrt{5}}{10}+y'^2.\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right)-2\left(x'^2.\frac{2\sqrt{5}}{10}-y'^2.\frac{2\sqrt{5}}{10}+x'.y'.\frac{2\sqrt{5}}{10}\right)+$$

$$+2\left(x'^2.\frac{5-\sqrt{5}}{10}+4.x'y'.\frac{\sqrt{5}}{10}+y'^2.\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right)-2=0$$

$$\Rightarrow\left(x'^2.\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)+y'^2.\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\right)=2$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{\frac{x'^2}{\left(\frac{4}{3-\sqrt{5}}\right)}+\frac{y'^2}{\left(\frac{4}{3+\sqrt{5}}\right)}=1}$$

A curva representa uma elipse (como pudemos ver pela rotação e translação de eixos).

Observações

Como o leitor deve ter percebido, procedendo da maneira que fizemos na questão do IME resolvida anteriormente, o algebrismo envolvido é extremamente desgastante, e não é difícil cometer "erros de contas". Veremos então a seguir algumas propriedades de rotação que permitirão que o mesmo exercício seja resolvido de forma mais mecânica, porém mais simples.

OBS: As propriedades que veremos a seguir funcionarão para todos os casos salvo o caso das parábolas, que por não possuírem centro deverão ser rotacionadas da maneira utilizada anteriormente

4.5 Propriedades Importantes de Rotação

Após as devidas translação e rotação de eixos, a equação geral da curva torna-se do tipo:

$$A''x^2 + C''y^2 + F'' = 0$$

O que tornou o nosso trabalho cansativo na questão resolvida anterior foi justamente determinar os coeficientes A″ e C″.

Existem duas propriedades de rotação que farão com que esses coeficientes sejam facilmente encontrados (evitando muitas contas e trabalho).

Propriedade 1:

Numa rotação qualquer , a expressão: $A + C$ **permanece constante. Isto é:** $A + C = A' + C'$

Propriedade 2:

Numa rotação qualquer, a expressão: $B^2 - 4AC$ **permanece constante. Isto é:** $B^2 - 4AC = B'^2 - 4A'C'$

A prova dessas propriedades será colocada a seguir:
Foi deduzida a relação entre os coeficientes da equação após uma rotação genérica de ângulo θ, anteriormente, chegando ao seguinte resultado:

$$\begin{cases} A' = A\cos^2\theta + \dfrac{B}{2}.\sin 2\theta + C.sen^2\theta \\ B' = \sin 2\theta\left(C - A\right) + B\cos 2\theta \\ C' = C.\cos^2\theta - \dfrac{B}{2}.\sin 2\theta + Asen^2\theta \\ D' = D.\cos\theta + E.\sin\theta \\ E' = E.\cos\theta - D.\sin\theta \\ F' = F \end{cases}$$

Logo:

$$A'+C' = (A+C)\cos^2\theta + (A+C)sen^2\theta + Bsen\theta.\cos\theta - Bsen\theta.\cos\theta$$

$$= A+C$$

$$\Rightarrow \boxed{A'+C' = A+C}$$

Calculemos B´² -4A´C´:

$$B'^2 = \sin^2(2\theta)\left(C^2 - 2AC + A^2\right) + \left(C-A\right)\sin\left(4\theta\right) + B^2.\cos^2\left(2\theta\right)$$

$$4A'C' = 4\left(A\cos^2\theta + \frac{B}{2}.\sin 2\theta + C.\sin^2\theta\right)\left(C.\cos^2\theta - \frac{B}{2}.\sin 2\theta + A\sin^2\theta\right)$$

$$= 4AC.\cos^4\theta - 2AB.\sin 2\theta.\cos^2\theta + 4A^2\sin^2\theta.\cos^2\theta + 2BC.\sin 2\theta.\cos^2\theta +$$

$$- B^2\sin^2 2\theta + 2AB.\sin 2\theta.\sin^2\theta + 4C^2.\sin^2\theta.\cos^2\theta - 2BC.\sin 2\theta.\sin^2\theta + 4AC.\sin^4\theta$$

$$= 4AC\left(\cos^4\theta + \sin^4\theta\right) - 2AB\left(\sin 2\theta.\cos 2\theta\right) + 2BC(\sin 2\theta.\cos 2\theta) +$$

$$+ 4A^2\sin^2\theta.\cos^2\theta + CA^2\sin^2\theta.\cos^2\theta - B^2\sin^2 2\theta$$

$$= 4AC\left(\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)^2 - 2\sin^2\theta.\cos^2\theta\right) + \sin 4\theta\left(-AB + BC\right) +$$

$$+ A^2\sin^2 2\theta + C^2\sin^2 2\theta - B^2\sin^2 2\theta$$

$$= 4AC\left(1 - 2\sin^2\theta.\cos^2\theta\right) + \sin 4\theta\left(-AB + BC\right) +$$

$$+ A^2\sin^2 2\theta + C^2\sin^2 2\theta - B^2\sin^2 2\theta$$

Subtraindo:

$$B'^2-4A'C'=\sin^2(2\theta)\left(C^2-2AC+A^2\right)+\left(BC-AB\right)\sin\left(4\theta\right)+B^2.\cos^2\left(2\theta\right)+$$
$$-4AC\left(1-2\sin^2\theta.\cos^2\theta\right)-\sin 4\theta\left(AB+BC\right)+$$
$$-A^2\sin^2 2\theta-C^2\sin^2 2\theta+B^2\sin^2 2\theta$$

$$=B^2\left(\cos^2 2\theta+\sin^2 2\theta\right)-2AC.\sin^2\left(2\theta\right)-4AC\left(1-\frac{\sin^2(2\theta)}{2}\right)$$
$$=B^2-4AC$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{B'^2-4A'.C'=B^2-4AC}$$

Essas duas propriedades deduzidas acima são de conhecimento geral para quem estuda rotações, e podem ser usadas numa prova como conhecimento dado.

OBS: Como queremos que B´ seja igual 0, teremos:

$$A'C'=\frac{B^2-4AC}{-4}$$

Como isso ajuda no problema da rotação?

Dada a equação de uma curva, sabemos como achar a soma A´+C´ , e o produto A´.C` de tal forma que o termo retangular seja eliminado. Ou seja, temos o produto e a soma dos coeficientes que desejamos conhecer.
Ora, sabendo a soma e o produto de duas incógnitas, pelo teorema de Girard, elas serão as raízes da equação do 2º grau:

$$\lambda^2-S\lambda+P$$

(onde S e P são conhecidos)

Conhecemos métodos práticos e rápidos de obter todos os coeficientes adequados para o reconhecimento da equação de uma curva no R².

Exemplo:

No exemplo resolvido anteriormente (questão do IME) poderíamos proceder da seguinte forma:

$$2x^2 - 4xy + 4y^2 - 2x - 8y + 9 = 0$$

$$\begin{cases} 4x - 4y - 2 = 0 \\ 8y - 4x - 8 = 0 \end{cases} \quad \therefore \quad (x, y) = \left(3, \frac{5}{2}\right) \text{ (centro)}$$

$$F' = 2(3)^2 - 4(3)\left(\frac{5}{2}\right) + 4\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2(3) - 8\left(\frac{5}{2}\right) + 9 = -4$$

$$\begin{cases} A' + C' = A + C = 6 \\ \underbrace{B'^2}_{0} - 4A'C' = B^2 - 4AC = -16 \end{cases} \Rightarrow A', C' = 3 \pm 2\sqrt{5}$$

Uma rotação que satisfaz o pedido me dá a equação:

$$\left(3 - \sqrt{5}\right)x^2 + \left(3 + \sqrt{5}\right)y^2 - 4 = 0$$

que é a mesma elipse encontrada com a solução feita anteriormente.

Resumo: Passo a passo

1) **Evitar degenerações. Para isso tentamos resolver a equação do 2º grau em x ou em y.**

2) **Caso não obtivermos sucesso, a curva não é uma degeneração. Partirmos para obter o centro da curva, utilizando as equações de translação de eixos.**

$$\begin{cases} 2Ax + By + D = 0 \\ 2Cy + Bx + E = 0 \end{cases}$$

3) **Se a curva não possui centro (isto é, o sistema não é determinado), como também não trata-se de degeneração, a única possibilidade é que a curva seja uma parábola.**

No caso de ser parábola, a única alternativa é descobrir o ângulo adequado para a rotação, e aplicar as equações de rotação:

$$tg(2\theta) = \frac{B}{A - C}$$

$$\begin{cases} x_o = x_o' \cos\theta - y_o' sen\theta \\ y_o = x_o' sen\theta + y_o' \cos\theta \end{cases}$$

Caso a curva possua centro, podemos calcular F´ (basta substituir as coordenadas do centro na equação da curva)

4) **Utilizamos A´+C´= A+ C para descobrirmos a soma A`+C´**

5) **Utilizamos B´² -4A´C´ = B²-4AC (usando B´=0) para descobrirmos o produto A´C´**

6) **Tendo o produto A´C´ e a soma A´+C´, podemos determinar A´ e C´.**

7) **Agora temos em mãos a equação:** $A'x'^2 + B'y'^2 + F' = 0$ **, a partir da qual é fácil reconhecer a origem da curva (elipse ou hipérbole).**

Observação final:

O leitor pôde reparar que com a equação do 2º grau que nos dará A´ e C´ , temos duas possibilidades para o A´ e C´. Como não foi feita restrição alguma durante a dedução, temos que qualquer um dos dois pares de solução cumprirá a tarefa de eliminar o termo retangular e os termos lineares.

A interpretação geométrica do fato de existirem 2 soluções, é que

para cada inclinação podemos rotacionar tanto para direita quanto para a esquerda com a finalidade de adequarmos nossos eixos.

Exercícios de Fixação

1. Determinar o LG definida pelas equações em R²

$a) \quad y^2 - 2xy - 4x + 2y - 2 = 0$

$b) \quad 4x^2 + 12xy + 9y^2 = 0$

$c) \quad x^2 - 2xy + y^2 - 5x = 0$

$d) \quad 4x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 3y + 2 = 0$

$e) \quad 2x^2 + 2y^2 - 4x + 6y + 7 = 0$

$f) \quad x^2 + 8xy + 16y^2 - 4x - 16y + 7 = 0$

2. Reduzir as equações às formas mais simples:

$a) \quad 11x^2 - 16xy - y^2 - 6x + 18y + 9 = 0$

$b) \quad 13x^2 - 10xy + 13y^2 + 4x - 68y + 28 = 0$

3. [IME 84] Uma reta r passa pelo ponto fixo P(-1,-3) e intercepta a reta s: 3x+2y-6=0 no ponto A e a reta t: y-3=0 no ponto B. Determinar a equação do lugar geométrico do ponto médio do segmento retilíneo AB à medida que a reta r gira em torno de P. Traçar o gráfico da curva.

Gabarito:
**1. a) hipérbole b) 2 retas coincidentes c) parábola
d) 2 retas paralelas e) conjunto vazio f) conjunto vazio.**

2.

$$a)\quad \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{1} = 1$$

$$b)\quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

3. $6xy + 4y^2 + 3y - 45 = 0$ (Gênero Elipse)