Lista 1 de funções
Prof. Filipe – www.rumoaoita.com

1-) Dadas $f(x)=x^2+3x+1$ e $g(x)=\dfrac{x^2+5x+1}{x^2+1}$, determine:
a) f(2), g(5) e f(3).g(4).)
b) Determine uma expressão para g(f(x))
c) Determine o domínio de f e de g.
d) Dê o domínio de gof.

2-) (IME-90) Seja f : $Z_*^+ \to Z$, tal que:
f(1) = 1
f(2n) = 2.f(n) + 1
f(f(n)) = 4n + 3.
Calcule f(1990).

3-) Analise o domínio das funções abaixo:

a) $f(x)=\dfrac{x^2+3x+1}{3x-5}$

b) $f(x)=\dfrac{\ln(x^2+3x+1)}{\ln(x-4)}$

c) $f(x)=\sqrt{x^2-6x+1}$

d) $f(x)=\dfrac{\sqrt[5]{\sqrt{2x^2-5x+1}}}{\sqrt[3]{x-8}}$

e) $f(x)=\dfrac{e^{3x-1}\ln(kx)}{5x^2-2}, k>0$

f) $f(x)=\left(\dfrac{3x-11}{6x^2-22x}\right)^{\frac{1}{2n}}$

4-) (ITA-2003) Mostre que toda função $f:\Re\setminus\{0\}\to\Re$, satisfazendo $f(xy)=f(x)+f(y)$ em todo o seu domínio, é par.

5-) (ITA-2003) Seja a função $f:Z\setminus\{0\}\to\Re$, tal que:

$f(x)=\sqrt{3^{x-2}}(9^{2x+1})^{\frac{1}{2x}}-(3^{2x+5})^{\frac{1}{x}}+1$. Determine a soma de todos os valores de x para que a equação $f(x)+y^2+2y=1$ tenha raiz dupla.

6-) Sejam $f,g:\Re\to\Re$, duas funções tais que:
a) $gof:\Re\mapsto\Re$ é injetora. Prove que *f* é injetora.
b) $gof:\Re\mapsto\Re$ é sobrejetora. Prove que *g* é sobrejetora.

7-) Classifique as funções abaixo em:
I – Injetora   II – Sobrejetora   III – Bijetora
IV – Não é injetora nem sobrejetora.

a) $f:\Re\mapsto\Re$ tal que $f(x)=2x+1$
b) $g:\Re\mapsto\Re_+$ tal que $g(x)=1-x^2$
c) $h:\Re\mapsto\Re_+$ tal que $h(x)=|1+x|$
d) $i:N\mapsto N$ tal que $i(x)=3x+2$
e) $j:\Re\mapsto Z$ tal que $j(x)=[x]$
f) $k:\Re^*\mapsto\Re^*$ tal que $k(x)=\dfrac{1}{x}$
g) $l:\Re\mapsto\Re$ tal que $l(x)=x^3$
h) $m:\Re\mapsto\Re$ tal que $m(x)=|x|(x-1)$

8-)Determine b em B = $\{y\in\Re\,/\,y\ge b\}$ para que a função *f* de R em B, definida por $f(x)=x^2-4x+6$, seja sobrejetora.

9-) Determine o maior valor de a em A= $\{x\in\Re\,/\,x\le a\}$ para que a função *f* de R em B, definida por $f(x)=2x^2-3x+4$, seja injetora.

10-)Seja a função A = $\{x\in\Re\,/-5\le x\le 2\}$ em B⊂R, definida por $f(x)=|x+3|-2$. Se *f* é sobrejetora, determine B.

11-)Determine o conjunto B de modo que a função *f*:[-1, 2]→B, definida por $f(x)=|2x-3|$, seja sobrejetiva. Esta função é injetiva? Justifique.

12-) Quantas são as injeções de $A=\{a,b\}$ em $B=\{c,d,e,f\}$?

13-) Quantas são as sobrejeções de $A=\{a,b,c\}$ em $B=\{d,e\}$

14-) Sejam $A=\{1,2\}$ e $B=\{1,2,3,4\}$ quantas funções de *A* para *B* são crescentes?

15-)(IME-2003) Sejam $A=\{1,2,3\}$ e $B=\{1,2,3,...,n\}$ quantas funções de *A* para *B* são crescentes, onde n é im inteiro maior que zero?

16-) Seja f uma função de Z em Z definida como $f(x)=\dfrac{x}{10}$ se x é divisível por 10 e $f(x)=x+1$ caso contrário. Se $a_0=2001$ e $a_{n+1}=f(a_n)$, qual o menor valor de n para o qual $a_n=1$?

17-)Seja $f(x) = x^2 - 3x + 4$. Quantas soluções reais tem a equação $f(f(f(f(...f(x))))) = 2$ (onde *f* é aplicada 2001 vezes)?

18-) Seja f uma função real que tem as seguintes propriedades:
i) Para todos x, y reais, $f(x+y) = x + f(y)$;
ii) *f*(0) = 2;
Calcule *f*(2000).

19-) Determine, para as funções bijetoras abaixo, a lei de correspondência que define a função inversa:

a) $f(x) = 2x + 3$
b) $f(x) = \dfrac{4x-1}{3}$
c) $f(x) = x^3 + 2$
d) $f(x) = (x-1)^3 + 2$
e) $f(x) = \sqrt[3]{x+2}$
f) $f(x) = \sqrt[3]{1 - x^3}$
g) $f(x) = e^{3x-8} - 1$
h) $f(x) = \log_4(3x+2)$

20-) Dada $f : \Re \mapsto \Re$, tal que $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & se \;\; x \geq 0 \\ x - 1, & se \;\; x < 0 \end{cases}$. Determine f^{-1}.

21-) A função *f* definida em $\Re - \{2\}$ por $f(x) = \dfrac{2+x}{2-x}$ é inversível. O seu contradomínio é $\Re - \{a\}$. Calcule *a*.

22-) A função *f* de $\Re - \{-2\}$ para $\Re - \{4\}$ definida por $f(x) = \dfrac{4x-3}{2+x}$. Qual o valor *a* do domínio de $f^{-1}(x)$ para que $f^{-1}(a) = 5$.

23-) Prove que qualquer função pode ser escrita como a soma de uma função par como uma função ímpar.

24-) Sejam $f : A \mapsto A$ e $g : A \mapsto A$ tais que *f* é uma função par e *g* uma função ímpar. Prove que:
a) $f(g(x))$ é par b) $g(f(x))$ é par

25-) Sejam n funções $f_1, f_2, ..., f_n$, tais que sempre exista a composição entre todas n a n. Prove que se uma delas for par, qualquer composição entre elas n a n, é par.

26-) Dada $f : \Re \mapsto \Re$, tal que

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 7, & se \;\; x \geq 2 \\ 2x - 1, & se \;\; -1 < x < 2 \\ -x^2 - 2x - 4, & se \;\; x \leq -1 \end{cases}$$

. Determine f^{-1}.

27-) A função f em R definida por $f(x) = |x+2| + |x-1|$ admite inversa? Justifique.

28-) Seja a função $f : \Re \mapsto \Re$ definida por: $f(x) = 2x - |2x - 4| + |x + 1|$. Determine a expressão de f^{-1}, bem como $f^{-1}(42)$.

29-) Esboce no mesmo plano os gráficos das funções abaixo:

a) $\begin{cases} f : R \mapsto R \\ f(x) = 2x + 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} f : R \mapsto R_+ \\ f(x) = 2^x \end{cases}$ c) $\begin{cases} f : R \mapsto R_+ \\ f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x \end{cases}$

d) $\begin{cases} f : A \mapsto A = \{x \in R \,/\, x \geq -1\} \\ f(x) = x^2 + 2x \end{cases}$

30-)Dadas as funções *f* e *g*, determine a inversa de gof:

a) $\begin{cases} f : R \mapsto R \\ f(x) = x^3 \end{cases}$ e $\begin{cases} g : R \mapsto R \\ g(x) = 2x + 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} f : A = \{x \in R \,/\, x \geq \frac{3}{2}\} \mapsto B = \{x \in R \,/\, x \geq \frac{-9}{4}\} \\ f(x) = x^2 - 3x \end{cases}$ e $\begin{cases} g : B \mapsto R_+ \\ g(x) = 4x + 9 \end{cases}$

31-) Sejam f e g funções de R em R tais que $f(x) = ax + b$ e $g(x) = cx + d$. Determine a relação entre *a*, *b*, *c* e *d*, de modo que $fog = gof$.

32-) Sejam as funções reais $f(x) = 2x + 7$ e $(fog)(x) = x^2 - 2x + 3$. Determine a lei da função *g*.

33-) Sejam as funções reais $g(x) = 2x + 3$ e $(fog)(x) = \dfrac{2x+5}{x+1}$. Determine a lei da função *f*.

34-) Sejam f e g funções de R em R, definidas por $f(x) = 2x + k$ e $g(x) = -x + t$. Sabendo que $f(f(x)) = 4x - 3$ e $fog = gof$, determine:
a) *k* e *t*.
b)os números reais x tais que $\dfrac{f(x)}{g(x)} \leq 0$.